

# نقش تاریخ ریاضیات در آموزش و یادگیری ریاضی

سید حسن علم‌الهدایی

## چکیده

باید اذعان کرد که تأمل در سیر تاریخ تحول و تکامل مفاهیم و قضایای ریاضی و عبرتها و آموزه‌های ناشی از آن چندان مورد عنایت معلمان و دانش‌پژوهان ریاضیات نمی‌باشد. هرچند که تاریخ ریاضیات نه صرفاً به عنوان یک علم، با روش‌شناسی خود بلکه به مثابه یک میراث علمی-فرهنگی سرشار از اندیشه‌ها و اندیشیدنها، خلاقیتها، نوآوریها، روشها و تلاشهای ریاضیدانان گذشته است و می‌تواند گستره فهم و ژرف‌اندیشی ما را در عرصه آموزش و یادگیری دانش ریاضی توسعه و تحکیم بخشد. کیفیت تجربه علمی و پژوهشی عالمان ریاضی در بستر زمان، الهام بخش خوبی برای پژوهشگران جوان است تا با بصیرت بیشتری به ساماندهی ذهن و اندیشه خویش پردازند و برای رویارویی با چالشهای علمی آماده‌تر شوند. در این مقاله نویسنده کوشیده است تا تأثیر و تأثر تاریخ ریاضیات را در عرصه کار ریاضی به مثابه یک ضرورت علمی مورد تأکید قرار دهد و به بررسی پرسشهای زیر پردازد.

- ۱- طبیعت دانش ریاضی چیست و یادگیری آن چگونه اتفاق می‌افتد؟
- ۲- آیا پرداختن به تاریخ ریاضیات در آموزش و یادگیری آن دارای ضرورت علمی و آموزشی است؟
- ۳- پرداختن به فرایند تطور و تکامل کدام مفاهیم ریاضی از اولویت برخوردار است؟ و چه ابزارهای عملی در این خصوص توصیه می‌شود؟

## مقدمه

بسیارند معلمانی که نمی‌پذیرند اوقات دانش‌پژوهان خود را با توجه به کمبود زمان و حجم بالای درسها، به آشنایی با فرایند تحول و تکامل اندیشه‌ها و مقولات ریاضی بگذرانند. اینان بر این اعتقادند که آنچه در عرصه‌ی تطور و رشد ریاضیات در طول سالیان دراز و بعضاً قرن‌ها اتفاق افتاده است و در بردارنده‌ی اندیشه‌ها و روشهای صواب و ناصواب ریاضیدانان می‌باشد دارای جنبه‌های الهام بخشی در آموزش و یادگیری ریاضی نیست. به عکس باورهای مغالطه‌آمیزی را در ذهن ما و شاگردانمان به وجود می‌آورد و مغز و اندیشه‌ی آنان را با مسائلی زاید و بعضاً بی‌ثمر انباشته خواهد نمود. بنابراین برای احتراز از این امور، تنها پرداختن به نتایج و گزاره‌های درست ریاضی شریک می‌باشد. اینان در واقع ریاضیات را به مثابه‌ی مجموعه‌ای از حقایق و نتایج اثبات شده می‌نگرند و توجه به این واقعیت را چندان مهم نمی‌دانند که قضیه‌ی  $X$  یا مفهوم  $Y$  مثلاً در زمان  $t$  و در تحت چه شرایطی متولد شده و توسعه یافته است. بلکه بر این باورند که با افزوده شدن قضیه‌ای اثبات شده به توده‌ی ریاضیات، زمینه و بافت تاریخی پیدایش خود را از دست می‌دهد. و تنها، محصول و نتیجه‌ی چنین تلاشهای تاریخی در عرصه‌ی فعالیت‌های آموزشی و پژوهشی ضروری می‌نماید [۱].

از این رو بسیاری از دست‌اندرکاران ریاضی، به ویژه در سالهای اخیر، به سیر تاریخی مفاهیم و قضایای ریاضی و عبرتها و الهامهای ناشی از آن در کار و تلاش ریاضی خود و شاگردانشان وقعی نمی‌نهند.

در مقابل، معتقدان به تأثیر و تأثر تاریخ ریاضیات در آموزش و یادگیری مفاهیم و مهارتهای ریاضی معتقدند که معلمان ریاضی کم اطلاع و یا ناآگاه از تاریخ ریاضیات، در واقع ریاضی را بی‌روح و در انزوا به یادگیرنده‌ها یاد می‌دهند. به نظر اینان سخن در این نیست که یادگیرنده‌های امروز در میدان آموزش و یادگیری ریاضیات تمام اشتباهات و تصورهای درست و نادرست گذشتگان را متحمل شوند بلکه بصیرت اجمالی در باب آنچه موجب نیل پیشینیان به این اندیشه‌های صواب و ناصواب گردیده است، می‌تواند سازنده و آموزنده باشد. ریاضیات، دانشی زنده و پویاست و حقایق کنونی ریاضی بر پایه‌ی وضعیتهای ساده و گذشته آنها در طول سالیان دراز بنا شده است درست همانگونه که بسط و توسعه مفاهیم و قضایا در آینده از وضعیتهای فعلی‌شان نشأت می‌گیرد.

تاریخ ریاضیات به مثابه‌ی یک میراث غنی فرهنگی سرشار از اندیشه‌ها، خلاقیتها و روشهای ریاضیدانان گذشته است که عجین شدن با آنها می‌تواند گستره‌ی فهم ما را بیافزاید و نگرش جدیدی را در عرصه‌ی آموزش ریاضی فراهم آورد. بنابراین نباید ریاضیات گذشته و تلاشهای خستگی‌ناپذیر گذشتگان را همچون مقولاتی فاقد اعتبار و غیر الهام‌بخش در تعلیم ریاضیات مدرسه‌ای تا دانشگاهی دانست.

از این رویکردهای موافق و مخالف در جایگاه تاریخ ریاضیات و ضرورت پرداختن به آن که بگذریم، سخن در این است که چگونه دانش و معرفتی به نام تاریخ ریاضیات می‌تواند در عرصه‌ی مهم آموزش و یادگیری ریاضی دارای نقشی پویا و سازنده باشد؟ در عین حال توجه داریم که در بحث پیرامون نقش تاریخ در تعلیم ریاضیات، باید میان تاریخ ریاضی به مثابه‌ی یک علم با مشخصه‌ها و روانشناسی مربوطه‌اش، و به کارگیری عبرتها و الهامهای ناشی از آن در کلاس و کار ریاضی تفاوت قائل شد هرچند که این دو با یکدیگر

در رابطه هستند.

اما در پاسخ به سؤال بالا ناگزیر از پرداختن به پرسشهای زیر هستیم که برخی از همه پرسشهای زیر مرور شده است.

- ۱- طبیعت دانش ریاضی چیست و یادگیری ریاضیات چگونه اتفاق می‌افتد؟
- ۲- چرا جذب جنبه‌هایی از تاریخ ریاضی در آموزش و یادگیری ریاضیات یک ضرورت علمی است؟
- ۳- پرداختن به فرایند تصور و تکامل چه نمونه‌هایی از مباحث ریاضی در کار ریاضی و در کلاس درس دارای اولویت است؟
- ۴- چه راهکارهای عملی برای بهره‌جویی از تاریخ ریاضیات در آموزش و یادگیری آن وجود دارد؟

## ۱- طبیعت دانش ریاضی چیست و یادگیری آن چگونه اتفاق می‌افتد؟

یکی از ملاحظات بنیادین در آموزش و یادگیری ریاضیات باور افراد به این مهم است که ریاضی چگونه دانشی است؟ چه مشخصه‌ها و طبیعتی دارد؟ هرچند در این باب دیدگاه‌های گوناگونی وجود دارد که پرداختن به آنها از حوصله این مقاله خارج است، ولی همه بر تفاوت ذاتی مقولات و حقایق ریاضی با سایر علوم متفق‌اند و در این اندیشه اشتراک نظر دارند که تعریفها، مفاهیم، گزاره‌ها و ساختمانهای ریاضی اموری مجردند و این تجرد در ریاضیات توین هم تقویت شده است.

در عین حال اندیشمندان از جمله ریاضی‌دانان، فیلسوفان، روانشناسان، متخصصان آموزش ریاضی و ... هرکدام با توجه به وابستگی‌شان به الگوهای فکری مختلف پاسخهای متفاوتی را برای پرسشهای زیر ارائه می‌دهند.

الف) آیا مقولات ریاضی مستقل از افراد بشر و ذهن‌های هوشمند، همواره به گونه‌ای مستقل و یکسان وجود دارند؟

ب) مفاهیم جدید ریاضی و حقایق قوی آن چگونه پدید می‌آیند؟ آیا انسانها آنها را ابداع می‌کنند و یا همواره به طریقی موجودند و تنها افراد خلاق و مستعد آنها را کشف می‌نمایند؟

به نظر می‌رسد که ریاضیدانان و فیلسوفان عموماً بر این اعتقادند که مقولات ریاضی فارغ از ذهنهای هوشمند وجود دارند و این ذهنها هستند که آنها را کشف می‌کنند و دانش ما با کشفهای بیشتر در این عرصه تغییر می‌کند. ما اندیشه‌های ریاضی را داریم در حالی که حقایق ریاضی خارج از ذهن و اندیشه ما وجود دارند [۲].

روانشناسان شناختی غالباً و متخصصان روانشناسی یادگیری ریاضیات عموماً معتقدند که ریاضیات تنها در ذهنها و اندیشه‌های هوشمند وجود دارند و این ذهنهای خلاق‌اند که آنها را ابداع می‌کنند. ریاضیات در بردارنده ایده‌هاست و هنگامی که مقدار بیشتری از آنها را ابداع می‌کنیم دچار تغییر و تحول می‌شود و با جرح و تعدیل برخی از ابعاد آن رشد و توسعه می‌یابد. ما ایده‌های ریاضی را داریم و آنها تنها در ذهن

و اندیشه ما وجود دارند. در هر صورت ریاضیات مجبور است که با ایده‌های موجود در ذهن هوشمند بشر کار کند. بنابراین پژوهشگری که در عرصه روانشناسی یادگیری ریاضی کار می‌کند بر این باور است که اندیشه‌های تو و دانش جدید ریاضی توسط انسانها ساخته می‌شوند و آنان در این ساخت و کار و همگانی نمودن مفاهیم یکدیگر را یاری می‌دهند.

مؤلف [۳] می‌گوید که یادگیری و آموزش ریاضی از مقولات روانشناختی است و ما پیشرفت قابل توجهی در ریاضیات نخواهیم داشت مگر اینکه بدانیم این شاخه از معرفت بشری چگونه یاد گرفته و فهم می‌شود. در عرصه روانشناسی یادگیری ریاضی، متخصصان می‌کوشند تا دریابند که چگونه عاملهای گوناگون اعم از بیرونی و درونی بر رفتار ریاضی شاگردان مؤثر می‌افتند. و اینکه واقعاً تفکر ریاضی چیست و ریاضیات چگونه یاد گرفته می‌شود در مرکزیت این مطالعه قرار دارد. بنابراین توجه جدی به فرایندهای ذهنی و پردازشی افراد در انجام تکلیفهای دشوار و پیچیده ریاضی و اینکه آنان چگونه و به چه میزانی از ظرفیتهای ذهنی و سبکهای شناختی خود بهره می‌جویند، از جایگاه بالایی برخوردار است. این دیدگاه که به رویکرد روانشناختی در تعلیم و تربیت ریاضیات موسوم است در برابر دیدگاه دیگری قرار می‌گیرد که به رویکرد منطقی موسوم است. باید اذعان کرد که توسعه ریاضیات و تبیین رفتار ریاضی یادگیرنده‌ها عمدتاً با رویکرد سنتی و خالص منطقی صورت می‌پذیرد که تنها به محصول نهایی کشف ریاضی توجه دارد و به فرایندهای ذهنی، فعل و انفعالات پردازشی و تفاوت‌های فردی که در نتیجه آن ریاضیات یاد گرفته می‌شود، عنایتی ندارد. ترتیب روش شناختی و ترتیب منطقی یادگیری ریاضیات دو مقوله‌ای است که مترتب بر این دو رویکرد می‌باشد [۴]. به هر حال دو رویکرد روانشناختی و منطقی به یادگیری ریاضی، روش‌ها و سبک‌های متفاوتی را در امر آموزش ریاضیات به معلمان و مربیان توصیه می‌کند و هر کدام با توجه به دیدگاههای خود نسبت به بدفهمیها و ناهمیهایی یادگیرنده‌ها و تدوین برنامه‌ها و ارزشیابی رفتار ریاضی یادگیرنده‌ها اقدام می‌کنند.

این دو دیدگاه - روان شناختی و منطقی - در اینکه تاریخ ریاضیات چگونه می‌تواند در ارتباط با آموزش و یادگیری آن قرار گیرد و ضرورت پرداختن به سیر تحول و تطور حقایق و قضایای ریاضی دارای نظریات مختلف و بلکه متضادی خواهند بود. با توجه به آنچه تاکنون در این نوشتار آمده است، چنین به نظر می‌رسد که با رویکرد روانشناختی به یادگیری ریاضی حداقل به مثابه یک عامل بیرونی بر رفتار ریاضی شاگردان غافل ماند. در حالی که نتیجه تبعی رویکرد منطقی که صرفاً به محصول نهایی و حقایق موجود ریاضی بدون توجه به پیشینه آن علاقمند است، حداقل تأثیر و تأثر تاریخ ریاضیات در عرصه آموزش و یادگیری آن است.

## ۲- چرا جذب جنبه‌هایی از تاریخ ریاضی در آموزش ریاضیات یک ضرورت علمی است؟

بنابر آنچه گفته شد می‌توان ادعا کرد که تاریخ ریاضیات قادر است همچون رویکرد واسطه‌ای در میان رویکرد خالص منطقی و رویکرد روانشناختی قرار گیرد و با به وجود آوردن مدلی جدید موجبات فهم معنی‌دارتر و یک پارچه‌تر ریاضیات را فراهم آورد، و این واقعیت را آشکارتر سازد که تنها یک راه و یک رویکرد لزوماً تبیین‌کننده بهترین شیوه آموزش و یادگیری هر جنبه خاصی از ریاضیات نیست.

هال روانشناس آمریکایی معتقد است که آگاهی و بصیرت نسبت به تاریخ هر علمی می‌تواند تبیین‌کننده مراحل حل باشد که هر فرد باید برای یادگیری از آنها عبور کند. در [۵] با تعدیل این ادعا، از باید به احتمالاً نتیجه می‌شود که آشنایی با سیر تحول و توسعه هر دانشی موجب شفافیت مراحل حل می‌شود که یادگیرنده احتمالاً در فرایند یادگیری خود از آنها عبور خواهد نمود و طبعاً پاسخهایی را برای چراها و ابهامهای ذهنهای جستجوگر دانش‌پژوهان، به ویژه آنهایی که استعداد بیشتری دارند، به همراه خواهد داشت. اگر بپذیریم که هنر ریاضیات در واقع ایجاد تفکر بویا و توانایی حل مسئله در فرد است، با مطالعه و الهام از تاریخ ریاضی و توجه به آن در امور آموزشی و پژوهشی، نکات برجسته‌ای را می‌یابیم که چگونه ریاضیدانان گذشته بن‌بست‌ها و مشکلات علمی خود را در زمانهای نسبتاً دراز حل کرده‌اند و ریشه‌های درستی یا نادرستی ایده‌های آنان در ارائه یک قضیه ریاضی و اثبات آن چه بوده است و نتیجه‌های متناقض و پارادوکس‌ها چگونه به وجود آمده‌اند. و یا در بعد زیبا شناختی و دقت و کوتاه شدن اثباتها و استدلالها چه اتفاقاتی افتاده و چطور به وقوع پیوسته است. چرا مفاهیم ریاضی امروزی به این شکل آموزش داده می‌شوند؟ مفاهیمی مانند تابع، حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال‌پذیری که در توسعه و تکامل حسابان و آنالیز ریاضی نقش داشته و منجر به ارائه و آموزش مثلاً آنالیز ریاضی، توپولوژی، نظریه اندازه، آنالیز فوریه و ... در وضعیتهای فعلی‌شان شده‌اند.

ریاضیدانان و خصوصاً معلمان ریاضی در هر سطحی از فعالیتهای آموزشی و پژوهشی خود باید کنجکاوانه و علاقمندانه به دنبال یافتن پاسخهای مناسبی برای واژه‌هایی مانند چرا، چه کسی، چه وقت، کجا و چطور باشند. اینها در واقع پرسشهای بنیادینی هستند که در عرصه هر علمی از جمله ریاضیات می‌توان جوابهایی قانع‌کننده و الهام‌بخش برای آنها یافت. بدون تردید یک پژوهشگر و یا معلم ریاضی که دارای درکی از تاریخ ریاضی است بصیرت و فهم ژرفتری را در کار تحقیق و طبعاً ارائه شیوه‌های آموزشی خود می‌یابد. تاریخ ریاضیات ما را به سؤالات مهمی در باب اینکه طبیعت دانش ریاضی چیست و چگونه پاسخ به این پرسشها در طی قرون متمادی تغییر یافته است، رهنمون می‌سازد که این خود حکایت از جنبه‌های پویایی تکامل ریاضی دارد.

جواب به این سؤالات که چرا اثباتها به این طریق حک و اصلاح شده و دقت و ظرافت یافته‌اند و مفاهیم ریاضی به این شکل توسعه یافته‌اند، پارادوکس‌ها و بن‌بست‌ها، تعریفها و حرکتها به چه دلیل بوده‌اند، همه و همه در تاریخ ریاضی یافت می‌شود و در عمل موجب انگیزش و علاقمندی بیشتر دانش‌پژوهان گشته و

کار ریاضی را برای آنان لذت بخش‌تر خواهد نمود.

به قول [۵] تاریخ ریاضیات گنجینه‌ای از ریاضیات واقعی را در مقابل ریاضیات فرضی فراهم می‌آورد. ریاضیات واقعی ریاضیاتی است که در گذشته به کار رفته و مورد بهره‌برداری قرار گرفته است و طبعاً قابل اعتمادتر از مباحث و مواد فرضی‌ای است که می‌تواند قبل از اینکه متقاعدکننده باشد، بعضاً مغالطه‌آمیز به نظر آید.

به علاوه ریاضیات یک محصول تاریخی و فرهنگی انسان است و زبان تفاهم علوم و تکنولوژی ملتها در عرصه توسعه ملی و فن‌آوری می‌باشد. به قول [۶] ریاضیات یکی از مهمترین مؤلفه‌های فرهنگی هر جامعه مدرن امروزی است.

تأثیر ریاضیات بر سایر عناصر علمی، فرهنگی، اقتصادی و اجتماعی چنان گسترده و زیر بنایی است که باید اذعان نمود امروز رشد فرهنگ توسعه و بستر سازی علمی فرهنگی تقریباً بدون اثر گذاری ریاضیات غیر محتمل به نظر می‌رسد.

بنابراین وقتی که ریاضیات را به مثابه یک عامل بنیادین در بستر سازی فرهنگی و تمدن بشری بدانیم، به عنوان یک ریاضیدان و یا معلم ریاضیات به سختی می‌توانیم از توجه و فهم مراحل مسلم رشد و توسعه تاریخی حقیقتها، مفاهیم و قضیه‌های ریاضی و آنچه بشر در طول سالیان دراز به آن پرداخته و انگیزه‌های این پرداختنها اجتناب نمائیم.

### ۳- پرداختن به فرایند تطور و تکامل چه نمونه‌هایی از مباحث ریاضی در عرضه آموزش و یادگیری از اولویت برخوردار است؟

اکنون که متخصصان آموزش ریاضی اصرار بر یادگیری معنی‌دار ریاضیات دارند، به نظر می‌رسد که این یادگیری زمانی روانتر می‌گردد که آموزش مفاهیم و قضایای ریاضی در بطن تاریخی‌شان صورت پذیرد و این از واقع‌بینی به دور نیست که ادعا کنیم ریاضیات تنها در متن تاریخی تحول و تکامل آن به درستی آموزش داده می‌شود. مهم این است که متخصصان تاریخ ریاضیات و معلمان ریاضی با یکدیگر همکاری داشته باشند. معلمان می‌توانند با طرح مسائل و مشکلات آموزش و یادگیری از کارشناسان تاریخ ریاضیات کمک بخواهند تا جنبه‌ها و نکته‌هایی از تاریخ ریاضیات را که می‌توانند در حل این مشکلات مؤثر افتند، به آنان پیشنهاد نمایند.

حسابان شاخه مهمی از دانش ریاضی است که با بسط و تکامل تدریجی خود به مثابه ابزاری توانمند در اختیار توسعه ریاضیات محض و کاربردی و نیز سایر شاخه‌های علوم قرار گرفته است. در واقع روش افنای یونان (بیش از ۲۰۰۰ سال قبل) در تعیین مساحتها اندک‌اندک به ایده حساب انتگرال تبدیل گردید و این شاخه از ریاضیات که برخی از کیفیتهای روش اشباع در آن حفظ شده است تکامل خود را مرهون تلاشهای نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) و لایبنیتس (۱۶۴۶-۱۷۱۶) می‌باشد که پس از آن توسط ریاضیدانانی چون کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) و ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) بر پایه دقت‌های ریاضی محکمی استوار گردید